10. Klasse Lösungen — 10
Polynomgleichungen, Polynom-Nullstellen — 06

1.
$x^3 - 4x^2 + 10x - 12 = 0$.
Probiere $x = 1$: $1^3 - 4 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 - 12 \neq 0$ geht nicht, $x = -1$ geht nicht, $x_1 = 2$ geht: $2^3 - 4 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 - 12 = 0$. Also Polynomdivision durch $(x - 2)$:
(Den in grund105.pdf beschriebenen Vorzeichenwechsel möge der Leser in den jeweils unterstrichenen Zeilen mit Farbstift selbst durchführen)

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 4x^2 + 10x - 12) : (x - 2) = \\
\underline{x^3 - 2x^2} \qquad\qquad\qquad\qquad = x^2 - 2x + 6 \\
\quad - 2x^2 + 10x \\
\quad \underline{- 2x^2 + \ \ 4x} \\
\qquad\qquad 6x - 12 \\
\qquad\qquad \underline{6x - 12} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$x^2 - 2x + 6 = 0$; $x_{2/3} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$ ↯
Also $x_1 = 2$ einzige Lösung.

2.
(a) Nullstelle „raten“: $x_1 = 1$. Polynomdivision $(x^3 - x^2 - 5x + 5) : (x - 1) = x^2 - 5$ (siehe ueb105.pdf, Aufgabe 3b).
$x^2 - 5 = 0$; $x_{2/3} = \pm\sqrt{5}$.
Also $f(x) = (x-1)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$.
[Bei dieser Aufgabe könnte man übrigens die Faktorzerlegung und damit die Nullstellen auch durch Ausklammern und Anwenden der dritten binomischen Formel erkennen: $f(x) = x^2(x-1) - 5(x-1) = (x-1)(x^2-5)$].

(b) $f(x) = x^2(x^3 + 5x^2 - 13x + 7)$.
Also $x_{1/2} = 0$ (doppelt).
Nullstelle „raten“: $x_3 = 1$.
Polynomdivision
$(x^3 + 5x^2 - 13x + 7) : (x - 1) =$
$= x^2 + 6x - 7$
$x^2 + 6x - 7 = 0$;
$x_{4/5} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm 8}{2}$;
$x_4 = 1$ (doppelt); $x_5 = -7$.
Somit: $f(x) = x^2(x-1)^2(x+7)$.

3.
$f(2{,}5) = 4 \cdot 2{,}5^3 - 6 \cdot 2{,}5^2 + 3 = 28$, $g(2{,}5) = 13 \cdot 2{,}5 - 4{,}5 = 28$. Also ist $(2{,}5|28)$ ein gemeinsamer Punkt der Graphen.

(Fortsetzung von 3.)
Schnittpunkte: $f(x) = g(x)$;
$4x^3 - 6x^2 + 3 = 13x - 4{,}5$;
$4x^3 - 6x^2 - 13x + 7{,}5 = 0$.
Da die Lösung $x_1 = 2{,}5$ schon bekannt ist, Polynomdivision durch $(x - 2{,}5)$:
$(4x^3 - 6x^2 - 13x + 7{,}5) : (x - 2{,}5) =$
$= 4x^2 + 4x - 3$
$4x^2 + 4x - 3 = 0$; $x_{2/3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{2 \cdot 4}$;
$x_2 = 0{,}5$; $x_3 = -1{,}5$.
Durch Einsetzen dieser x-Werte in f oder g erhält man die y-Werte der weiteren Schnittpunkte: $(0{,}5|2)$ und $(-1{,}5|-24)$.

4.
Multiplikation mit dem Nenner $x - 3$ ergibt:
$2x = (x^2 - 7x + 6)(x - 3)$, also
$2x = x^3 - 3x^2 - 7x^2 + 21x + 6x - 18$, also
$x^3 - 10x^2 + 25x - 18 = 0$.
Lösung „raten“: $x_1 = 2$. Polynomdivision $(x^3 - 10x^2 + 25x - 18) : (x - 2) = x^2 - 8x + 9$.
$x^2 - 8x + 9 = 0$;
$x_{2/3} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 4 \pm \sqrt{7}$.
Alle drei Lösungen dürfen in die Gleichung eingesetzt werden (kritisch wäre nur im Nenner der x-Wert 3 gewesen). Also Lösungsmenge:
$L = \{2; 4 + \sqrt{7}; 4 - \sqrt{7}\}$.

5.
Definitionslücken:
$4x^3 + 7x^2 - 2x = 4x(x^2 + \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}) = 0$;
$x_1 = 0$; $x_{2/3} = \frac{-1{,}75 \pm \sqrt{1{,}75^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-0{,}5)}}{2 \cdot 1}$;
$x_2 = -2$; $x_3 = 0{,}25$.
Definitionsbereich D also $\mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 0{,}25\}$.
Nenner faktorisieren: $f(x) = \frac{1}{4x(x+2)(x-0{,}25)}$.

6.
Der Zeichnung entnimmt man die Nullstellen -4 (einfach) und 2 (doppelt); Ansatz also $y = a(x+4)(x-2)^2$.
Der Zeichnung entnimmt man ferner $(0|-2)$ als Punkt des Graphen. Einsetzen dieser x- und y-Werte liefert:
$-2 = a \cdot (0+4)(0-2)^2 = 16a$, also $a = -\frac{1}{8}$.
Somit $f(x) = -\frac{1}{8}(x+4)(x-2)^2$.